

✓ Проверка теоремы... //

18/11

Кубица по в-ти произв. сечения радиуса r : $\int_{|y|=r} dS_y = \omega_n r^{n-1}$, $\forall r > 0$

Объем шара: $\int_{|y| \leq R} dy = \int_0^R dr \int_{|y|=r} dS_y = \int_0^R \omega_n r^{n-1} dr$

$$= \left. \frac{\omega_n r^n}{n} \right|_0^R = \frac{\omega_n}{n} R^n, \quad \forall R > 0$$

Объем единичного шара: $\beta_n = \frac{W_n}{n} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} =$
 $= \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!}, \forall n \geq 2$

$$W_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad \beta_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\Delta u = 0 \sim \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

Задача: найти все сферич. ур-ния $\Delta u = 0$, зависящие только от радиуса $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Коротко: $\Delta u = 0, u = f(r) = ?$

Это сферические симм. реш-я $\Delta u = 0$ в шаре. Он-р Δ в сферич. симм. случае:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_k}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{x_k}{r} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r} \frac{\partial}{\partial r}, k = \overline{1, n}$$

$\square u = f(r) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$ в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_k} = f'(r) \frac{x_k}{r}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(f'(r) \frac{x_k}{r} \right) = f''(r) \cdot \frac{x_k^2}{r^2} + f'(r) \frac{1 \cdot r - x_k \frac{x_k}{r}}{r^2}$$

$$= f''(r) \frac{x_k^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - x_k^2}{r^3}$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = f''(r) \cdot \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{r^2} + f'(r) \cdot$$

$$\cdot \frac{nr^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}{r^3} = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = \frac{1}{r^{n-1}}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{df(r)}{dr} \right)$$

Итак, n -р л. в сферич. сист. координат $\Delta U = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{df(r)}{dr} \right)$ где $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \in \mathbb{R}^n$

Задача 2 $\Delta U = 0$ $g/u = f(r) = ?$

$$\Delta U = 0 \sim \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{df(r)}{dr} \right) = 0 \sim r^{n-1} f'(r) = C_1 =$$

$$\sim \text{const} \sim f'(r) = \frac{C_1}{r^{n-1}}$$

Удобный выбор C_1 : $f'(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \left(= \frac{1}{\text{площадь}} \right)$

пав-ти сферы радиуса r)

специал. выбранное реш.

$$f'(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_2 r}, & n=2, \\ \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}, & n \geq 3 \end{cases} \sim f(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_2} \ln r, & n=2, \\ -\frac{1}{\omega_n (n-2) r^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

удобный выбор: $C_2 = 0$

Общий вид сферич. симм. ф-ции в $\mathbb{R}^n$

$$u = \tilde{f}(r) = \begin{cases} M_1 \ln r + M_2, & n=2, \\ \frac{M_1}{r^{n-2}} + M_2, & n \geq 3 \end{cases}$$

Работаем дальше с обратными реш-ми

Основное сфр. Фундаментальное реш-ие $\Delta u = 1$ в

$\mathbb{R}^n$ наз-ся ф-ция $E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n=2, \\ \frac{1}{n(n-2)} |x|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$

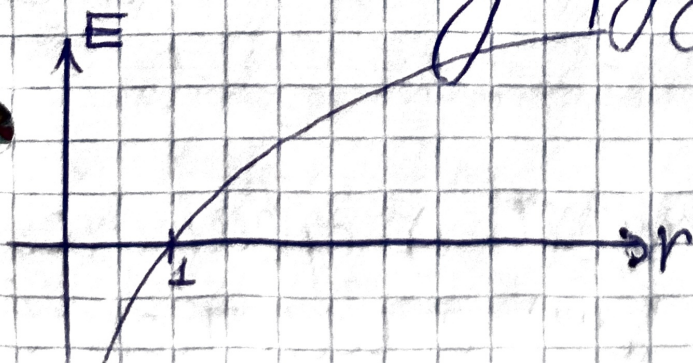
Такой выбор const особенно удобен
д/матем. теории

Зам Везде помним, что $E(x)$ зависит
по сути только от радиуса $r = |x|$. Испо-

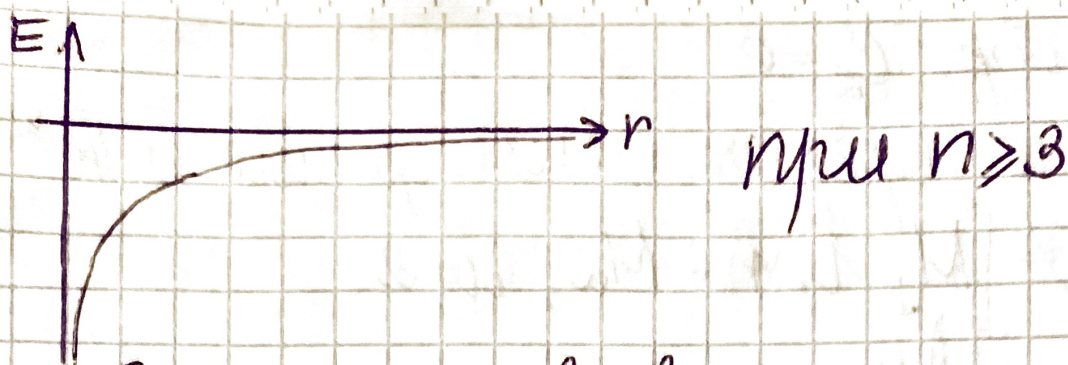
льзуем обознач. $E(r) = E(x)|_{|x|=r}$, $\frac{\partial E}{\partial r}$ -

- производная по радиусу и т.д.

Условный вид фунд. реш-я



при $n=2$



Элемент св-ва фунда. реш-я

1) $\Delta E(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

2) $\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}$ при $r > 0$;

3) $E(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow 0+} -\infty$;

4) $E(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$ г/д $n \geq 3$,

$E(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty$ г/д $n = 2$.

(1) - (4) очевидны.

5) Характер особенности в 0

$|x|^{n-1} E(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow 0+} 0$ г/д $\forall n \geq 2$

▲ При $n=2$ получаем: $|x|^{n-1} E(x)|_{n=2} = \frac{1}{2\omega_2} r.$

$\ln r \xrightarrow{r=|x| \rightarrow 0+} 0$ (по Лопиталю)

При $n \geq 3$ получаем: $|x|^{n-1} E(x) = -\frac{r^{n-1}}{\omega_n (n-2) r^{n-2}}$

$= -\frac{r}{\omega_n (n-2)} \xrightarrow{r \rightarrow 0+} 0$ ■

! Зам На практике часто $\neq$ связанное фунда. реш-е $u = E(x - x^{(0)})$ с центром в т.

$x^0 \in \mathbb{R}^n$. Все св-ва переносятся на него относительно сдвинутого радиуса

$$r = |x - x^{(0)}|$$

Напр., $\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n |x - x^{(0)}|^{n-1}} g/$

$$r = |x - x^{(0)}|$$

Практиче. смысл функ. реш.

Случай $n=2$ — особый. Здесь $E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$ — логарифмич. потенциал (часто уч-ся в зомб-ках физики)

Случай $n=3$ — основной физ. смысл.

Здесь $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} = -\frac{1}{4\pi r}$

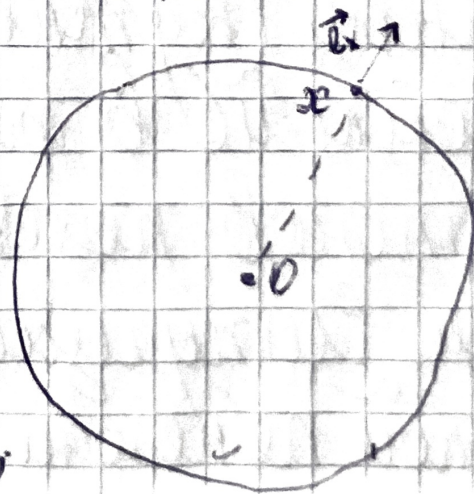
Частн. производ =

$$\frac{\partial E}{\partial x_k} = \frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{x_k}{r}$$

$$\text{grad} E = \vec{F}(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\vec{x}}{r} = \frac{1}{4\pi |x|^2} \frac{\vec{x}}{|x|}, \quad \vec{e}_x =$$

$$= \frac{\vec{x}}{|x|} \text{ — орт в-ра } \vec{x}$$

$\vec{F}(x)$ — в-р, приложенный к т. x в направл. $\vec{x}$ и изменяющийся обратно пропорц.



квадрату расстояния до выбр. центра (закон обратных квадратов)

В физике обычно $\vec{F}$ Ньютонов сил
ловый в-р $\vec{F}_N(x) = - \frac{1}{|x|^2} \frac{\vec{x}}{|x|} = \text{grad } E_N(x)$,

где $E_N(x)$ — ньютонов потенциал в $\mathbb{R}^3$

Связь: $\vec{F}_N(x) = -\text{grad } E(x)$, $E_N(x) = -\text{div } E(x)$,

$$E_N(x) = \frac{1}{|x|}, \quad E(x) = -\frac{1}{\text{div } |x|}$$

Терминология

Силовой в-р — в-р напряж-ти силов. поля, т.е. сила, с к дейст. задан. поле на единич. объект, находящ-ся в заданной т.

Потенциал (силов. ф-ция) — ~~скаляр~~

~~скаляр~~ скаляр. величина, grad к дает заданный (нужный) сил. в-р.

Комм-т в физ. задачах более удобен ньютонов потенциал, в мат. функ. реш. ситуации сводятся друг к другу ф-лой перехода: $[E_N(x) = -\text{div } E(x)]$ в $\mathbb{R}^3$